

МАШИНОСТРОЕНИЕ

MACHINE BUILDING



УДК 62-192

Оригинальное теоретическое исследование

<https://doi.org/10.23947/2541-9129-2025-9-2-146-157>

Метод вероятностной сетки для закона Фишера – Типпета

А.А. Котесов

Донской государственный технический университет, г. Ростов-на-Дону, Российская Федерация

✉ a.kotesov@yandex.ru

EDN: TCVEAL

Аннотация

Введение. Оценка параметров вероятностных законов распределения с использованием вероятностных сеток находит широкое применение на практике, особенно в современных программных комплексах. Такой подход активно используется для статистического анализа, где результаты вычислений представляются в виде вероятностного графика, что даёт возможность оценить соответствие набора данных предполагаемой вероятностной модели и выявить выбросы. В контексте вероятностной оценки нагруженности элементов машин и конструкций некоторые авторы предлагают применять закон Фишера – Типпета. Этот закон характеризуется функцией распределения, которая содержит три параметра и ориентирована на максимум, что обеспечивает гибкость в описании статистических данных и позволяет получать оценку максимального значения в контексте нагруженности. Тем не менее, в существующей литературе недостаточно обоснованы графическое представление результатов вычислений и методика оценки параметров, в том числе и с использованием метода вероятностной сетки, что ограничивает практическое применение закона Фишера – Типпета. Таким образом, основная цель данного исследования заключается в обосновании и разработке методики оценки параметров закона Фишера – Типпета с использованием метода вероятностной сетки.

Материалы и методы. В качестве материалов рассматривались принципы и теоретические основы построения вероятностных сеток, предварительная группировка данных и ранговый метод оценки эмпирической функции распределения. Обосновывались аналитические зависимости для построения вероятностной сетки и оценки параметров закона Фишера – Типпета. Использовались метод математического моделирования и сравнительный анализ. Для моделирования задействовали программный комплекс «Матлаб 8.6». Данные обобщали в табличном формате и визуализировали в виде графиков.

Результаты исследования. Обоснована и показана на примере методика построения вероятностного графика и методика графической оценки параметров закона Фишера – Типпета. Представлены график эмпирической функции распределения и вероятностный график с описанием позиций. Предложена методика построения специальной шкалы для оценки параметра формы, ориентированной на точку отсчета в начале координат. Выполнен сравнительный анализ оценок параметров, полученных графическим и аналитическим методами. Сопоставлялись оценки параметров масштаба, формы и сдвига. Относительная погрешность оценок методом вероятностной сетки не превышает 2 %. Показатель для параметра масштаба — 1,83 %; формы — 0,67 %, сдвига — 0,45 %. Соответствующие итоги аналитической оценки: 4,4 %, 9,33 % и 2,13 %. В данном случае погрешность выше, однако это не значит, что аналитический метод менее точен.

Обсуждение и заключение. Показана адекватность предложенной методики графической оценки параметров закона Фишера – Типпета методом вероятностной сетки. Ее можно применять, например, в программных комплексах или пользовательских приложениях. Специальная шкала для графической оценки параметра формы также подходит для оценки параметра формы закона Вейбулла. Полученные аналитические зависимости, положения методики и графический материал можно использовать при разработке соответствующего национального стандарта.

Ключевые слова: вероятностная сетка, вероятностный график, оценка параметров распределения, анализ надежности, закон Вейбулла, закон Фишера – Типпета

Благодарности. Автор выражает благодарность рецензентам, чья критическая оценка представленных материалов и предложения по их совершенствованию способствовали значительному повышению качества изложения результатов исследования.

Для цитирования. Котесов А.А. Метод вероятностной сетки для закона Фишера – Типпета. *Безопасность техногенных и природных систем.* 2025;9(2):146–157. <https://doi.org/10.23947/2541-9129-2025-9-2-146-157>

Original Theoretical Research

Probability Grid Method for Fisher-Tippett Law

Anatoly A. Kotesov 

Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation

✉ a.kotesov@yandex.ru

Abstract

Introduction. Estimation of the parameters of probability distribution laws using probability grids is widely used in practice, particularly in modern software systems. This approach is actively employed for statistical analysis, where the calculation results are presented as a probability graph. This allows for the assessment of the correspondence between a given data set and a proposed probability model, as well as the identification of outliers. In the context of probabilistic assessment of the loading of machine elements and structures, some authors suggest applying the Fisher–Tippett law. This law is characterized by a distribution function with three parameters and is oriented to the maximum. This provides flexibility in the description of statistical data and enables the estimation of the maximum value in the context of loading. Nevertheless, the existing literature has not sufficiently substantiated the graphical representation of calculation results and the method of parameter estimation, including the use of the probability grid method, which limits the practical application of the Fisher–Tippett law. Therefore, the aim of this study is to justify and develop a methodology for estimating parameters of the Fisher–Tippett law using the probability grid method.

Materials and Methods. The principles and theoretical foundations of constructing probability grids, the preliminary grouping of data, and a ranking method for estimating the empirical distribution were considered as the materials for the study. Analytical dependencies for constructing a probability grid and estimating the parameters of the Fisher–Tippett law were justified. The method of mathematical modeling and comparative analysis were employed. The Matlab 8.6 software package was utilized for modeling. The data were summarized in a tabular format and visualized in the form of graphs.

Results. The method of constructing a probabilistic graph and the method of graphical estimation of the parameters of the Fisher–Tippett law were justified and demonstrated by example. A graph of the empirical distribution function and a probability plot with a description of the locations were presented. A method for constructing a special scale for estimating the shape parameter centered on the origin was proposed. A comparative analysis of parameter estimates obtained using graphical and analytical methods was performed. Estimates of the scale, shape, and shift parameters were compared. The relative error in estimates using the probability grid method was not more than 2%. The indicator for the scale parameter was 1.83%; for the shape parameter was it 0.67%, and for the shift parameter it was 0.45%. Corresponding results of the analytical assessment were 4.4%, 9.33% and 2.13%. In this case, the error was higher, but it did not mean that the analytical method was less accurate.

Discussion and Conclusion. The adequacy of the proposed method of graphical estimation of the parameters of the Fisher–Tippett law by the probabilistic grid method has been demonstrated. This method can be applied, for example, within software packages or user applications. A special scale for graphically estimating the shape parameter can also be used to estimate the shape parameter of the Weibull law. The obtained analytical dependencies, the provisions of the methodology and the graphical materials can be used in the development of the corresponding national standard.

Keywords: probability grid, probability graph, distribution parameter estimation, reliability analysis, Weibull law, Fisher-Tippett law

Acknowledgements. The author would like to express his gratitude to the reviewers for their critical assessment of the submitted materials and their suggestions for improving the quality of research results.

For citation. Kotesov AA. Probability Grid Method for Fisher-Tippett Law. *Safety of Technogenic and Natural Systems.* 2025;9(2):146–157. <https://doi.org/10.23947/2541-9129-2025-9-2-146-157>

Введение. Графическое представление результатов статистического анализа в виде вероятностных графиков широко применяется в современных программных комплексах, в частности при анализе надежности или выживаемости. Это позволяет оценить параметры закона распределения и идентифицировать выбросы¹. Оценка параметров с помощью вероятностных сеток используется наряду с другими известными методами и в некоторых случаях может быть предпочтительнее. Вероятностные графики применяют при обработке результатов ресурсных испытаний² и составлении контрольных карт в системах управления качеством³. Метод вероятностной сетки позволяет визуально оценить соответствие набора данных предполагаемой модели случайной величины, о чем говорится в работах Дерябина М.А. [1], Добротина С.А. [2], Шпера В.Л. [3], Буланова Я.И. [4], Аблазовой К.С. [5], Великановой Н.П. [6], Хазановича Г.Ш. [7] и других современных ученых.

Касьянов В.Е. [8] и Котесов А.А. [9] для вероятностной оценки нагруженности элементов машин и конструкций предлагают использовать одну из форм обобщенного распределения экстремальных значений [10] с определенным видом параметризации, которую предлагают называть законом Фишера – Типпета. Данная модель похожа на трехпараметрический закон Вейбулла, но в отличие от него ориентирована на максимальное значение. Закон Фишера – Типпета подходит для оценки показателей надежности совместно с законом Вейбулла, к примеру, при использовании модели отказа нагрузка — прочность [11].

Графическое представление результатов вычислений и методика оценки параметров для данного закона не обоснованы должным образом. В научной литературе и нормативно-технической документации не представлена методика оценки параметров с помощью вероятностной сетки, что ограничивает практическое применение закона Фишера – Типпета. Поэтому основная цель данного исследования заключалась в обосновании и разработке методики оценки параметров закона Фишера – Типпета с использованием метода вероятностной сетки.

Материалы и методы. Оценка параметров распределения с помощью вероятностных графиков основана на группировке данных по интервалам и построении интервального эмпирического распределения независимо от предполагаемого теоретического распределения. Поэтому такие методы часто называют непараметрическими или ранговыми. Вероятностная сетка строится для конкретного закона распределения вероятностей с целью получения линейной зависимости между переменными⁴. Построение графика предполагает линейную аппроксимацию массива эмпирических точек на вероятностной сетке. Поэтому такой подход считается несколько грубым, но достаточно часто применяется наряду с другими. Метод вероятностной сетки может быть определяющим в случае, когда другие методы несостоятельны. К примеру, при получении оценок параметров методом максимального правдоподобия функция правдоподобия может содержать несколько локальных максимумов. В этом случае оценки параметров могут быть весьма неточными [12].

Для обоснования вероятностной сетки функцию распределения вероятностного закона необходимо привести к линейному виду. Функция распределения закона Фишера – Типпета определяется выражением:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\left(\frac{c-x}{a}\right)^b}, & x \leq c, \\ 0, & x > c, \end{cases} \quad (1)$$

где x — значение случайной величины; a, b, c — соответственно параметры масштаба, формы и сдвига распределения.

Преобразуем функцию распределения (1) путем логарифмирования левой и правой части. При условии, что $c > x$, получим:

$$\begin{aligned} -\ln(1 - F(x)) &= \left(\frac{c-x}{a}\right)^b, \\ \ln(-\ln(1 - F(x))) &= b \ln(c-x) - b \ln(a). \end{aligned} \quad (2)$$

Очевидно, что выражение (2) — это линейная функция вида:

$$y = qx + m, \quad (3)$$

где x — переменная функции; q и m — константы.

¹ ГОСТ Р ИСО 16269–4–2017. *Статистические методы. Статистическое представление данных. Часть 4. Выявление и обработка выбросов*. Электронный фонд правовых и нормативно-технических документов. URL: <https://docs.cntd.ru/document/1200146680> (дата обращения: 15.01.2025).

² ГОСТ Р 50779.27–2017. *Статистические методы. Распределение Вейбулла. Анализ данных*. Электронный фонд правовых и нормативно-технических документов. URL: <https://docs.cntd.ru/document/1200146523> (дата обращения: 15.01.2025).

³ ГОСТ ISO 7870–1–2022. *Статистические методы. Контрольные карты. Часть 1. Общие принципы*. Электронный фонд правовых и нормативно-технических документов. URL: <https://docs.cntd.ru/document/1200192703> (дата обращения: 15.01.2025).

⁴ ГОСТ 11.008–75. *Прикладная статистика. Графические методы обработки данных. Метод вероятностных сеток*. URL: <https://meganorm.ru/Data2/1/4294753/4294753131.pdf> (дата обращения: 15.01.2025).

Сопоставив (2) и (3), получим:

$$\underbrace{\ln(-\ln(1-F(x)))}_y = \underbrace{b \ln(c-x) - b \ln(a)}_{qx+m}.$$

Выражение (2) отличается от аналогичного, обоснованного для закона Вейбулла с тремя параметрами, только правой частью:

$$\underbrace{b \ln(x-c) - b \ln(a)}_{\text{закон Вейбулла}} \quad \underbrace{b \ln(c-x) - b \ln(a)}_{\text{закон Фишера – Типпета}}.$$

Поэтому для построения вероятностного графика закона Фишера – Типпета целесообразно использовать основные положения ГОСТ 11.008 и ГОСТ 50779.27. Согласно этим стандартам, при графическом анализе статистические данные наносятся на вероятностную сетку, а затем оцениваются параметры распределения. Отметим, что метод вероятностной сетки реализуется как графоаналитическим способом, так и полностью аналитическим. Поэтому для устранения возможной неясности будем называть оценку параметров с помощью метода вероятностной сетки — графической, а оценку методом максимального правдоподобия — аналитической.

Левая часть выражения (2) позволяет определить ординату вероятностной шкалы для оценки параметра масштаба. Предположим, что $c - x = a$. Подставив это значение в (2), получим:

$$\begin{aligned} \ln(-\ln(1-F(x))) &= b \ln(a) - b \ln(a), \\ \ln(-\ln(1-F(x))) &= 0, \\ e^{\ln(-\ln(1-F(x)))} &= e^0, \\ -\ln(1-F(x)) &= 1, \\ e^{-\ln(1-F(x))} &= e^1, \\ \frac{1}{1-F(x)} &= e, \\ F(x) &= 1 - \frac{1}{e}, \\ F(x) &\approx 0,6321. \end{aligned} \tag{4}$$

Результат (4) позволяет сделать вывод, что абсцисса точки аппроксимирующей прямой с нулевой ординатой будет оценкой параметра масштаба.

По оси абсцисс вероятностного графика может быть использован десятичный логарифм. В этом случае зависимость (2) примет вид:

$$\ln(-\ln(1-F(x))) = \frac{1}{\lg(e)} (b \lg(c-x) - b \lg(a)).$$

Важный момент при реализации метода вероятностной сетки — предварительная обработка исходных статистических данных, в частности, получение интервального вариационного ряда и оценка значений эмпирической функции распределения. Как правило, для получения эмпирической функции распределения применяется ранговый метод, который базируется на оценке позиции распределения упорядоченных данных с учетом характеристик вариационного ряда (среднего значения, медианы, моды и т. д.). Поэтому для определения ординат точек применяются различные зависимости, в том числе выражения для приближенной оценки [13]. В данном случае выбор будет обусловлен количеством эмпирических данных, предполагаемым теоретическим распределением и видом вероятностного графика. При этом учитывается необходимость адекватного описания крайних членов вариационного ряда [14].

Следует отметить, что некоторые ранее обоснованные подходы к оценке эмпирической функции распределения подвергаются критике, и это может быть предметом отдельного рассмотрения [15].

Результаты исследования. Методом обратных функций выполнено моделирование набора случайных данных без определенного физического смысла, распределенных по закону Фишера – Типпета.

Обратная функция распределения получена аналитически из выражения (1):

$$\begin{aligned} F(x) &= 1 - e^{-\left(\frac{c-x}{a}\right)^b}, \\ -\ln(1-F(x)) &= \left(\frac{c-x}{a}\right)^b, \end{aligned}$$

$$\frac{c-x}{a} = \left(-\ln(1-F(x))\right)^{\frac{1}{b}},$$

$$x = c - a\left(-\ln(1-F(x))\right)^{\frac{1}{b}},$$

$$F^{-1}(x) = c - a\sqrt[b]{-\ln(1-F(x))}. \tag{5}$$

Моделирование выполнено с помощью программного комплекса Matlab 8.6 («Матлаб 8.6», рис. 1) по заданным параметрам закона — a, b, c . Исходные данные для моделирования представлены в таблице 1.

Таблица 1

Исходные данные для моделирования

Параметры закона Фишера – Типпета			Количество значений
a	b	c	n
100,00	3,00	250,00	100

```

1 fisher_tippet_mle.m x +
1  '@Исходные данные:';
2  a = 100; '/параметр масштаба';
3  b = 3;  '/параметр формы';
4  c = 250; '/параметр сдвига';
5  '@Генерация массива случайных чисел в интервале [0;1] с помощью команды rand():';
6  gamma = rand(100,1);
7  '@Вычисление значений обратной функции закона Фишера-Типпета и получение случайной выборки в виде массива data:';
8  data = c-a*((-log(1-gamma)).^(1/b));
9  '@Оценка параметров распределения по ранее полученной случайной выборке методом максимального правдоподобия:';
10 '@Функция плотности распределения закона:';
11 custmpdf = @(x,a,b,c) (c>x).*(b/a).*(((c-x)/a).^(b-1)).*exp(-((c-x)/a).^b);
12 '@Точность и количество итераций:';
13 opt = statset('MaxIter',1e5,'MaxFunEvals',1e5,'FunValCheck','off');
14 '@Оценка параметров распределения с помощью команды mle():';
15 params = mle(data,'pdf',custmpdf,'start',[100 3 250],'Options',opt,'UpperBound',[0 0 -Inf],'UpperBound',[max(data) Inf Inf]);
    
```

Рис. 1. Моделирование набора случайных данных в Matlab 8.6

Результаты моделирования в виде набора случайных данных x_i представлены в таблице 2.

Таблица 2

Набор случайных данных без определенного физического смысла

№	x_i									
1	201,98	222,87	182,26	183,98	133,30	114,41	204,15	157,16	169,63	217,17
2	124,97	100,63	138,10	112,03	185,71	160,66	169,88	123,02	192,45	179,76
3	143,79	97,90	118,26	208,58	152,80	95,93	179,54	214,92	155,05	132,63
4	140,21	199,05	140,76	179,14	200,77	189,65	178,47	117,03	152,32	174,79
5	148,32	164,27	169,47	153,61	160,16	200,97	201,86	198,03	187,74	205,69
6	160,11	147,75	109,29	188,97	127,93	179,33	153,42	128,49	159,80	160,55
7	176,62	180,02	183,43	149,66	113,64	170,37	180,74	132,75	84,58	172,97
8	147,27	138,01	158,67	133,01	161,65	168,27	194,75	114,29	162,36	139,61
9	199,99	156,53	104,26	161,36	181,23	178,00	241,30	197,14	144,12	159,39
10	195,72	167,66	182,20	148,29	148,13	144,22	180,65	161,10	169,07	132,26

Выполнена аналитическая оценка параметров масштаба, формы и сдвига. Оценки обозначены соответственно — a', b', c' (таблица 3).

Таблица 3

Результаты аналитической оценки параметров

Оценки параметров закона Фишера – Типпета		
a'	b'	c'
104,40	3,28	255,32

Закон Фишера – Типпета, в отличие от закона Вейбулла, имеет ограничение справа и задает максимальное значение случайной величины, поэтому для получения вариационного ряда необходимо упорядочить значения набора данных (выборки) от максимума до минимума.

Если объем выборки $n \leq 30$, то не рекомендуется группировать данные по интервалам. В данном случае каждой вариате будет присвоен ранг j , а для оценки значений эмпирической функции распределения рекомендовано использовать приближение для медианной позиции рангов [16]:

$$F(x_i) = \frac{j-0,3}{n+0,4} (j=1,2\dots n), \tag{6}$$

где x_i — упорядоченное от максимума до минимума значение варианты выборки, соответствующее j -му рангу; j — порядковый номер ранга; n — объем выборки.

В противном случае при $n > 30$ необходимо выполнить группировку данных по интервалам в соответствии с абсолютным размахом выборки. При этом количество интервалов k рекомендовано принимать в пределах $7 \leq k \leq 40$ в зависимости от объема выборки n . Для группировки данных необходимо определить границы интервала, подобрав значения $X' \leq x_{\min}$ и $X'' \geq x_{\max}$, и разбить полученный интервал $[X'; X'']$ на интервалы равной длины h :

$$h = \frac{X'' - X'}{k}. \tag{7}$$

Затем следует получить интервальный вариационный ряд, определив количество значений выборки n_i , попавших в каждый интервал. Каждый интервал описывается абсциссой X_i , которая определяет позицию распределения упорядоченных данных.

Для средней позиции эмпирическая функция распределения оценивается с помощью выражения:

$$F(X_i) = \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{n+1} (i=1,2\dots k), \tag{8}$$

где X_i — середина i -го интервала; n_i — количество вариант выборки, попавших в i -й интервал; k — количество интервалов; n — объем выборки.

В качестве примера сгруппированы и рассчитаны значения эмпирической функции распределения (рис. 2) для набора данных из таблицы 3.

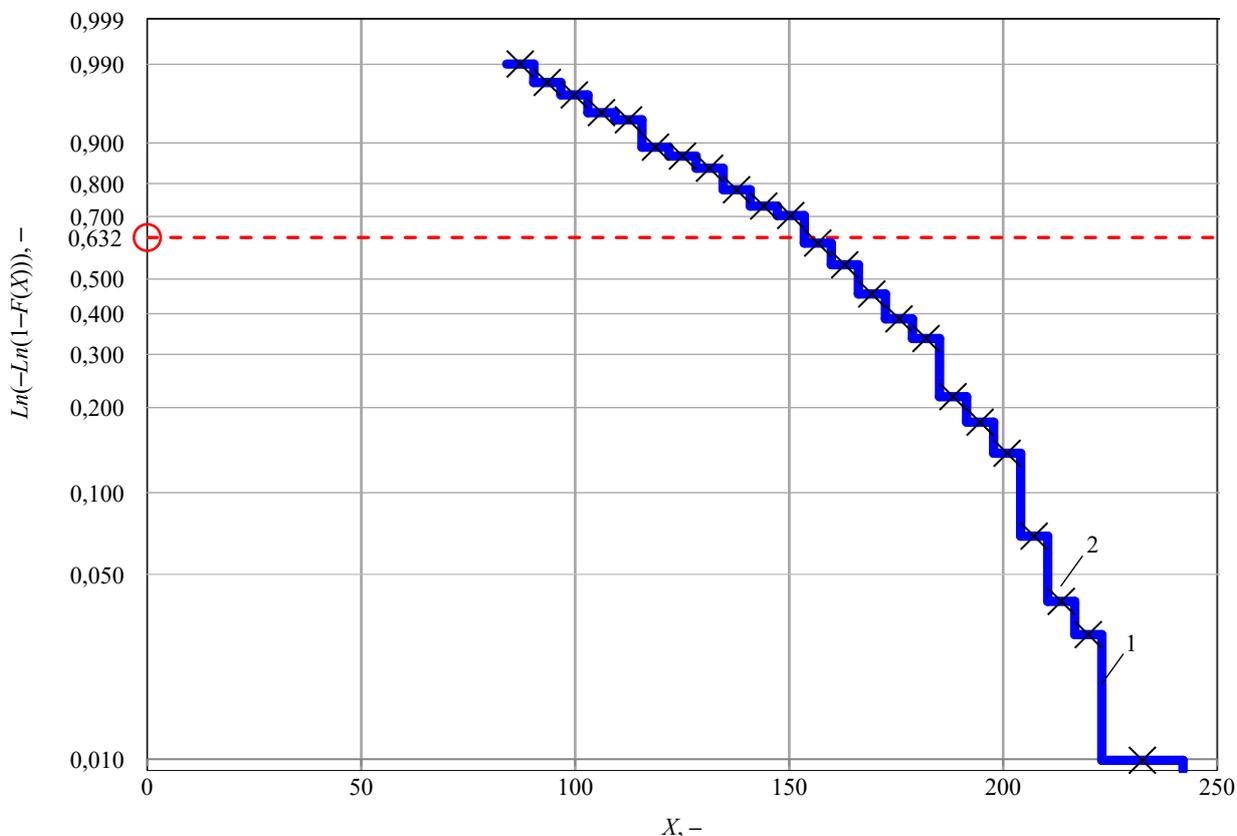


Рис. 2. Эмпирическая функция распределения: 1 — функция; 2 — середина интервала

На рис. 2 по оси ординат указана величина вероятности, по оси абсцисс — значения набора данных (выборки) без определенного физического смысла.

Для группировки данных принято $k = 25$, $X' = 84$, $X'' = 242$ и определено значение $h = 6,32$. Одно значение выборки попало в первые три интервала, поэтому их объединили. Итоговое количество интервалов — $k = 23$. Результаты вычислений представлены в таблице 4.

Таблица 4

Результаты вычислений

i	Интервал ранга		n _i	X _i	F(X _i)	F(X _i)+F(X _{i+1})	Lg(X _i)	Ln(-Ln(1-(F(X _i)+F(X _{i+1}))))	C'-X _i	Lg(C'-X _i)
	начало	конец								
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1*	223,04*	242,00*	1	232,52	0,0099	0,0099	2,3665	-4,6101	22,68	1,3555
2	216,72	223,04	2	219,88	0,0198	0,0297	2,3422	-3,5015	29,00	1,4623
3	210,40	216,72	1	213,56	0,0099	0,0396	2,3295	-3,2087	35,32	1,5480
4	204,08	210,40	3	207,24	0,0297	0,0693	2,3165	-2,6335	41,64	1,6195
5	197,76	204,08	7	200,92	0,0693	0,1386	2,3030	-1,9024	47,96	1,6808
6	191,44	197,76	4	194,60	0,0396	0,1782	2,2891	-1,6282	54,28	1,7346
7	185,12	191,44	4	188,28	0,0396	0,2178	2,2748	-1,4038	60,60	1,7824
8	178,80	185,12	12	181,96	0,1188	0,3366	2,2600	-0,8906	66,92	1,8255
9	172,48	178,80	5	175,64	0,0495	0,3861	2,2446	-0,7175	73,24	1,8647
10	166,16	172,48	7	169,32	0,0693	0,4554	2,2287	-0,4979	79,56	1,9007
11	159,84	166,16	9	163,00	0,0891	0,5446	2,2122	-0,2402	85,88	1,9339
12	153,52	159,84	7	156,68	0,0693	0,6139	2,1950	-0,0497	92,20	1,9647
13	147,20	153,52	9	150,36	0,0891	0,7030	2,1771	0,1939	98,52	1,9935
14	140,88	147,20	3	144,04	0,0297	0,7327	2,1585	0,2771	104,84	2,0205
15	134,56	140,88	5	137,72	0,0495	0,7822	2,1390	0,4214	111,16	2,0459
16	128,24	134,56	6	131,40	0,0594	0,8416	2,1186	0,6111	117,48	2,0699
17	121,92	128,24	3	125,08	0,0297	0,8713	2,0972	0,7179	123,80	2,0927
18	115,60	121,92	2	118,76	0,0198	0,8911	2,0747	0,7963	130,12	2,1143
19	109,28	115,60	5	112,44	0,0495	0,9406	2,0509	1,0379	136,44	2,1349
20	102,96	109,28	1	106,12	0,0099	0,9505	2,0258	1,1005	142,76	2,1546
21	96,64	102,96	2	99,80	0,0198	0,9703	1,9991	1,2575	149,08	2,1734
22	90,32	96,64	1	93,48	0,0099	0,9802	1,9707	-4,6101	155,40	2,1914
23	84,00	90,32	1	87,16	0,0099	0,9901	1,9403	-3,5015	161,72	2,2088

где * — корректировка при объединении интервалов 1–3 в один интервал [223,04; 242,00].

По оси абсцисс вероятностного графика принимаем шкалу с десятичным логарифмом. Результаты вычислений в столбцах 8 и 9 таблицы 4 определяют координаты точек для построения графика $\{Lg(X_i); Ln(-Ln(1-(F(X_i)+F(X_{i+1}))))\}$.

На следующем этапе оценивается параметр сдвига. Для этого сквозь массив точек (поз. 1 рис. 3) необходимо провести плавную кривую (не прямую) (поз. 2 рис. 3).

В точке пересечения прямой аппроксимирующей точки и прямой с «нулевой» ординатой (поз. 7 рис. 3) выполняется графическая оценка параметра масштаба A' .

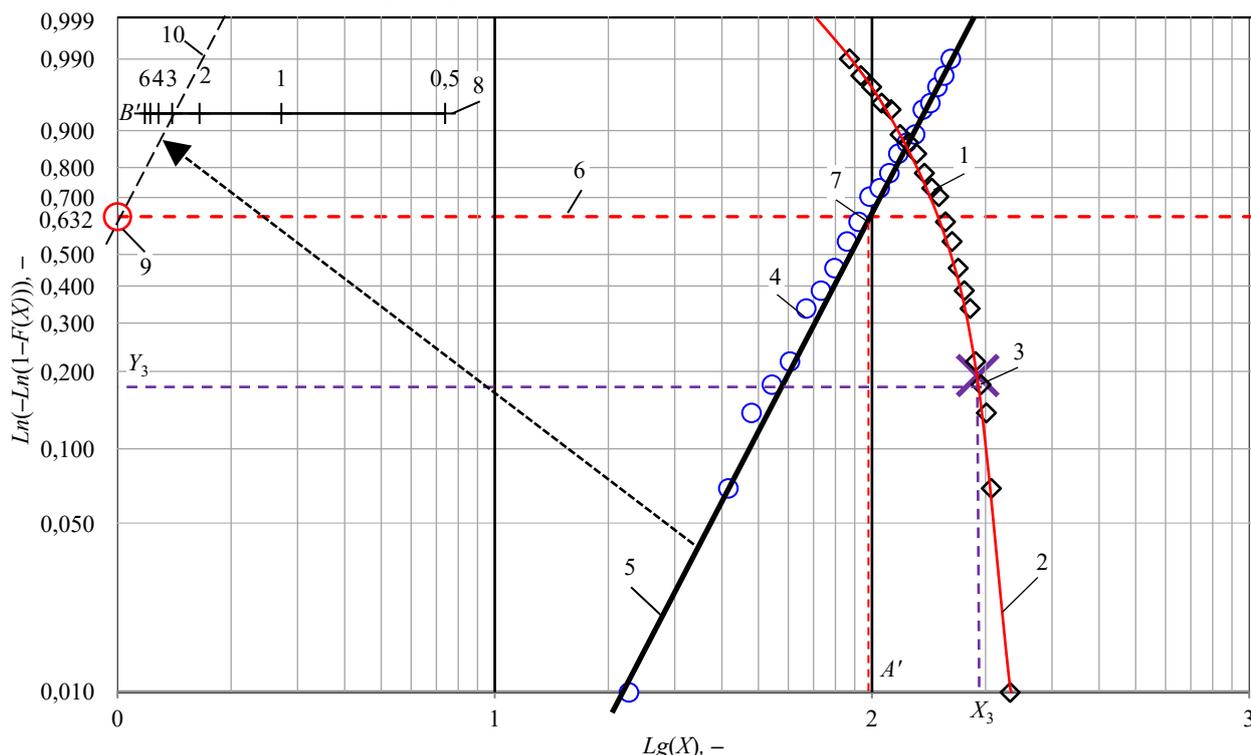


Рис. 3. Графическая оценка параметров закона Фишера – Типпета: 1 — точки с координатами $\{Lg(X_i); Ln(-Ln(1-(F(X_i)+F(X_{i+1})))\}$; 2 — линия для оценки абсциссы X_3 по ординате Y_3 ; 3 — точка с координатами $\{Y_3; X_3\}$; 4 — точки с координатами $\{Lg(C'-X_i); Ln(-Ln(1-(F(X_i)+F(X_{i+1})))\}$; 5 — прямая, аппроксимирующая точки 4; 6 — линия для оценки параметра масштаба; 7 — точка пересечения линий 5 и 6, соответствующая оценке параметра масштаба A' ; 8 — шкала для оценки параметра формы B' ; 9 — точка с координатами $\{0; 0\}$; 10 — прямая, проведенная через точку 9 параллельно прямой 5, для оценки параметра формы B' по шкале 8

На рис. 3 по оси ординат указана величина вероятности, по оси абсцисс — значения набора данных (выборки) без определенного физического смысла.

Координаты точек крайних членов вариационного ряда обозначаются через $\{X_1; Y_1\}$ и $\{X_2; Y_2\}$, и оценивается координата Y_3 :

$$Y_3 = \frac{Y_1 + Y_2}{2}. \tag{9}$$

С помощью ординаты Y_3 на ранее обозначенной кривой следует определить абсциссу X_3 (поз. 3 рис. 3). Затем оценивается параметр сдвига C' :

$$C' = \frac{X_1 \cdot X_2 - X_3^2}{X_1 + X_2 - 2X_3}. \tag{10}$$

В представленном примере крайние члены вариационного ряда — это средние точки интервалов $i = 1$ и $i = 23$ с координатами $\{Lg(X_1); Ln(-Ln(1-(F(X_1))))\}$ и $\{Lg(X_{23}); Ln(-Ln(1-(F(X_{22})+F(X_{23})))\}$. Соответственно, $Y_1 = Ln(-Ln(1-(F(X_1))))$, $Y_2 = Ln(-Ln(1-(F(X_{22})+F(X_{23}))))$, $X_1 = Lg(X_1)$; $X_2 = Lg(X_{23})$. В результате графическая оценка параметра сдвига $C' = 248,88$. Используем ее для корректировки абсциссы всех точек, определив величины $(C' - X_i)$, и нанесем на график точки с соответствующими координатами (поз. 4 рис. 3). Как видно, после корректировки точки выстроились «ровнее», что позволяет провести через них прямую линию (поз. 5 рис. 3).

Оценка параметра формы соответствует показателю угла наклона аппроксимирующей прямой (поз. 5 рис. 3) к оси абсцисс. Для графической оценки параметра можно использовать координаты точек или специальную шкалу (при наличии). При оценке параметра формы по координатам необходимо выражать величины по оси абсцисс в масштабе натурального логарифма, т. е. использовать величину $Ln(X)$ вместо $Lg(X)$.

В рассмотренном примере представлена шкала для графической оценки параметра формы B' (поз. 8 рис. 3). Для построения шкалы выполнен расчет координат точек $\{Lg(X); Ln(Y)\}$ по заданным значениям параметра формы (таблица 5). Шкала ориентирована на точку отсчета с координатами $\{0; 0\}$ (поз. 9 рис. 3). Для оценки параметра формы необходимо через точку отсчета провести прямую, параллельную аппроксимирующей прямой (поз. 10 рис. 3).

Построение шкалы для графической оценки параметра формы

B'	0,5000	1,0000	2,0000	3,0000	4,0000	5,0000	6,0000
$Ln(Y)$	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
$Ln(X)$	2,0000	1,0000	0,5000	0,3333	0,2500	0,2000	0,1667
$Lg(X)$	0,8686	0,4343	0,2171	0,1448	0,1086	0,0869	0,0724

В результате обработки данных получены графические оценки параметров закона Фишера – Типпета (таблица 6).

Таблица 6

Результаты графической оценки параметров

Оценки параметров закона Фишера – Типпета		
A'	B'	C'
98,17	2,98	248,87

После оценки параметров необходимо выполнить проверку с помощью обратной функции (5), используя заданные значения вероятностей:

$$F^{-1}(x) = C' - A'(-\ln(1 - F(x)))^{\frac{1}{B'}}. \quad (11)$$

Вычислив значения обратной функции распределения (11) и соединив полученные точки на графике, можно визуально оценить качество модели. Как видно, график обратной функции (рис. 4) плавно описывает массив изначальных точек (поз. 1 и 2 рис. 4). Это позволяет сделать вывод, что полученная модель хорошо описывает данные, и оценка параметров выполнена правильно.

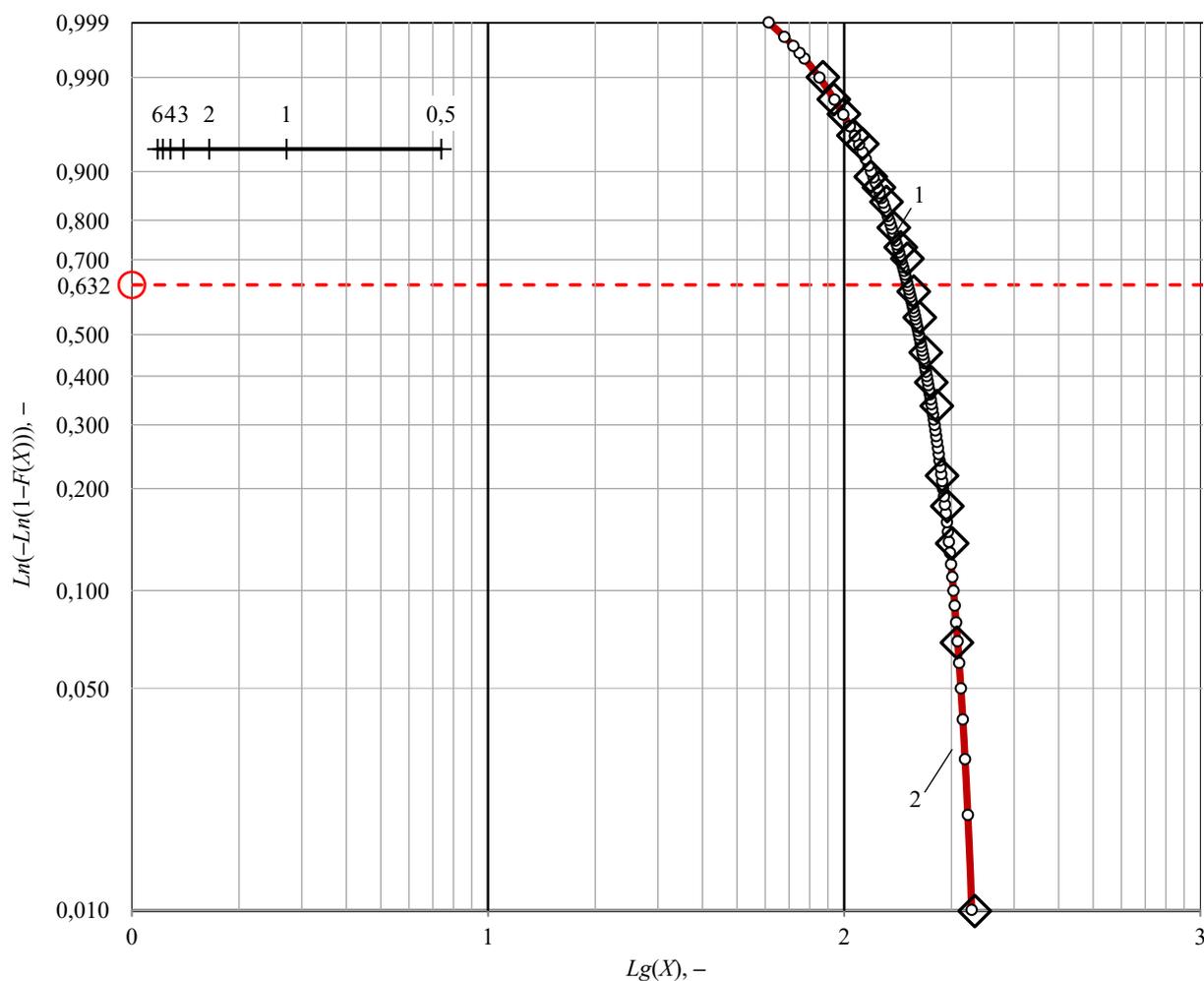


Рис. 4. Проверка модели после графической оценки параметров:

- 1 — начальные точки с координатами $\{Lg(X_i); Ln(-Ln(1-(F(X_i)+F(X_{i+1})))\}$;
- 2 — график обратной функции распределения $F^{-1}(x)$ с параметрами A', B', C'

На рис. 4 по оси ординат указана величина вероятности, по оси абсцисс — значения набора данных (выборки) без определенного физического смысла.

Результаты поверочных расчетов представлены в таблице 7.

Таблица 7

Результаты проверки полученной модели

$F(x)$	$F^{-1}(x)$	$Lg(F^{-1}(x))$	$Ln(-Ln(1-F(x)))$
0,0010	239,1548	2,3787	-6,9073
0,0050	232,2033	2,3576	-5,2958
0,0100	227,8309	2,3068	-4,6001
0,0500	212,5564	2,2775	-2,9702
0,1000	202,6589	2,2537	-2,2504
0,2000	189,4586	2,2317	-1,4999
0,3000	179,3564	2,2096	-1,0309
0,4000	170,4725	2,1862	-0,6717
0,5000	162,0373	2,1596	-0,3665
0,6000	153,5320	2,1263	-0,0874
0,7000	144,4053	2,0758	0,1856
0,8000	133,7435	2,0299	0,4759
0,9000	119,0766	1,9303	0,8340
0,9900	85,1730	1,8882	1,5272
0,9990	61,3715	1,7880	1,9326

Как видно, графические и аналитические оценки параметров близки к параметрам, заданным при моделировании набора данных (a, b, c).

Сравнивать полученные оценки по отношению к заданным параметрам не совсем корректно, однако такое сравнение оправданно, если принять заданные параметры за истинные параметры генеральной совокупности, а набор случайных данных x_i считать репрезентативной выборкой. Сравнительный анализ графических и аналитических оценок представлен в таблице 8.

Таблица 8

Сравнение графических и аналитических оценок параметров

Показатель	Параметр масштаба	Значение	$\delta, \%$	Параметр формы	Значение	$\delta, \%$	Параметр сдвига	Значение	$\delta, \%$
Заданные параметры	a	100,00	–	b	3,00	–	c	250,00	–
Аналитическая оценка параметров	a'	104,40	4,40	b'	3,28	9,33	c'	255,32	2,13
Графическая оценка параметров	A'	98,17	1,83	B'	2,98	0,67	C'	248,87	0,45

Сравнительный анализ показал, что относительная погрешность графических оценок не превышает 2 % ($\delta < 2 \%$). Погрешность аналитических оценок в данном примере оказалась выше, но это не значит, что аналитический метод менее точен.

Обсуждение и заключение. Представленный метод вероятностной сетки для закона Фишера – Типпета адекватен и подходит для практического применения. Например, его можно использовать в программных комплексах или при создании пользовательских приложений для графического представления результатов статистического анализа. Открывается возможность выполнять подгонку модели совместно с другими известными методами, в том числе если они несостоятельны. Предложенную методику построения шкалы для графической оценки параметра формы можно применять при оценке параметра формы закона Вейбулла. Полученные аналитические зависимости, положения методики и графический материал могут быть полезны при разработке соответствующего национального стандарта.

Список литературы / References

1. Дерябин М.А., Бавыкин О.Б., Дьяков Д.А. Применение метода вероятностной бумаги для определения закона распределения результатов измерений. В: *Труды II Международной научно-практической конференции «Современные тенденции развития науки и образования: Теория и практика»*. Москва: Институт системных технологий; 2018. С. 67–72.
Deryabin M, Bavykin O, Dyakov D. Application of the Probabilistic Paper Method to Determine the Law of Distribution of Measurement Results. In: *Proceedings of II International Scientific and Practical Conference “Modern Trends in the Development of Science and Education: Theory and Practice”*. Moscow: Institute of System Technologies; 2018. P. 67–72. (In Russ.)
2. Добротин С.А., Косырева О.Н. Оценка наличия выбросов в данных времени удерживания при хроматографическом анализе. В: *Труды Международной научно-практической конференции Science and technology research — 2024*. Петрозаводск: Новая наука; 2024. С. 11–22. URL: <https://sciencen.org/assets/Kontent/Konferencii/Arhiv-konferencij/KOF-971.pdf?ysclid=m6huh354xe556269601> (дата обращения: 15.01.2025).
Dobrotin SA, Kosyрева ON. Assessing the Presence of Outlier in Retention Time Data from Chromatographic Analysis. In: *Proceedings of International Scientific and Practical Conference Science and Technology Research — 2024*. Petrozavodsk: New Science; 2024. P. 11–22. URL: <https://sciencen.org/assets/Kontent/Konferencii/Arhiv-konferencij/KOF-971.pdf?ysclid=m6huh354xe556269601> (In Russ.) (accessed: 15.01.2025).
3. Шпер В.Л. Инструменты качества и не только! Часть 5. Анализ закона распределения с помощью вероятностных сеток. *Методы менеджмента качества*. 2021;8:54–60.
Shper VL. Quality Tools and More! Part 5. Analysis of the Distribution Law Using Probability Grids. *Methods of Quality Management*. 2021;8:54–60. (In Russ.)
4. Буланов Я.И., Мошкало Н.Г., Курденкова А.В., Шустов Ю.С., Малега Д.К. Установление эмпирических законов распределения для определяющих показателей качества параарамидных тканей для бронепакетов с антипрорезными и антипрокольными свойствами. *Известия высших учебных заведений. Технология легкой промышленности*. 2023;59(1):106–109. https://doi.org/10.46418/0021-3489_2023_59_01_20
Bulanov YaI, Moshkalo NG, Kurdenkova AV, Shustov YuS, Malyuga DK. Establishment of Empirical Laws of Distribution for Key Quality Indicators of Para-Aramid Fabrics for Armored Packages with Anti-Cut and Anti-Punch Properties. *The News of Higher Educational Institutions. Technology of Light Industry*. 2023;59(1):106–109. (In Russ.) https://doi.org/10.46418/0021-3489_2023_59_01_20
5. Аблазова К.С. Контрольные карты, определяющие стабильность технологического процесса, и их приложения. *Проблемы вычислительной и прикладной математики*. 2023;3(49):124–134.
Ablazova KS. Control Charts that Determine the Stability of the Technological Process and Their Applications. *Problems of Computational and Applied Mathematics*. 2023;3(49):124–134. (In Russ.)
6. Великанова Н.П., Великанов П.Г. Изменение жаропрочности материала рабочих лопаток турбины с учетом влияния эксплуатационной наработки. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*. 2023;20(2):42–48. <https://doi.org/10.31429/vestnik-20-2-42-48>
Velikanova NP, Velikanov PG. Changing the Heat Resistance of the Turbine Blades Material with Taking into Account the Influence of Operational Life. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*. 2023;20(2):42–48. (In Russ.) <https://doi.org/10.31429/vestnik-20-2-42-48>
7. Хазанович Г.Ш., Апрышкин Д.С. Оценка влияния внутренних факторов на показатели загруженности пассажирских лифтовых установок на основе результатов регулярного мониторинга. *Безопасность техногенных и природных систем*. 2023;7(3):34–43. <https://doi.org/10.23947/2541-9129-2023-7-3-34-43>
Khazanovich GSh, Apyrshkin DS. Assessment of the Influence of Internal Factors on the Indicators of Passenger Elevator Units Utilization Based on the Results of Regular Monitoring. *Safety of Technogenic and Natural Systems*. 2023;7(3):34–43. <https://doi.org/10.23947/2541-9129-2023-7-3-34-43>
8. Касьянов В.Е., Демченко Д.Б., Косенко Е.Е., Теплякова С.В. Метод оптимизации надежности машин с применением интегрального показателя. *Безопасность техногенных и природных систем*. 2020;1:23–31. <https://doi.org/10.23947/2541-9129-2020-1-23-31>
Kasyanov VE, Demchenko DB, Kosenko EE, Teplyakova SV. Method of Machine Reliability Optimization Using Integral Indicator. *Safety of Technogenic and Natural Systems*. 2020;1:23–31. <https://doi.org/10.23947/2541-9129-2020-1-23-31>
9. Котесов А.А. Усеченная форма закона Фишера – Типпета для моделирования нагруженности машиностроительных конструкций. *Безопасность техногенных и природных систем*. 2024;8(4):39–46. <https://doi.org/10.23947/2541-9129-2024-8-4-39-46>
Kotesov AA. Fisher-Tippett Law Truncated Form for Loading Modeling of Machinery Structures. *Safety of Technogenic and Natural Systems*. 2024;8(4):39–46. <https://doi.org/10.23947/2541-9129-2024-8-4-39-46>

10. Fisher RA, Tippet LHC. Limiting Forms of the Frequency Distribution of the Longest of Smallest Member of Sample. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. 1928;24(2),180–190. <https://doi.org/10.1017/S0305004100015681>

11. Котесов А.А., Котесова А.А. Комплексная корректировка параметров выборочных распределений характеристик прочности и нагруженности при оптимизации показателей надежности объектов машиностроения. *Известия Тульского государственного университета. Технические науки*. 2023;8:699–708. <https://doi.org/10.24412/2071-6168-2023-8-699-700>

Kolesov AA, Kotesova AA. Comprehensive Correction Strength and Loads Characteristics Sample Distributions Parameters at Machinery Engineering Objects Reliability Optimization. *News of the Tula State University. Technical Sciences*. 2023;8:699–708. (In Russ.) <https://doi.org/10.24412/2071-6168-2023-8-699-700>

12. Lawless JF. *Statistical Models and Methods for Lifetime Data*, 2nd ed. Hoboken: Wiley; 2011. 664 p.

13. Ross R. Graphical Methods for Plotting and Evaluating Weibull Distributed Data. In: *Proc. of 1994 4th International Conference on Properties and Applications of Dielectric Materials (ICPADM)*. Brisbane, QLD, Australia; 1994. P. 250–253 <http://doi.org/10.1109/ICPADM.1994.413986>

14. Hyndman RJ, Yanan Fan. Sample Quantiles in Statistical Packages. *The American Statistician*. 1996;50(4):361–365. <http://doi.org/10.1080/00031305.1996.10473566>

15. Makkonen L, Pajari M, Tikanmäki M. Discussion on “Plotting Positions for Fitting Distributions and Extreme Value Analysis”. *Canadian Journal of Civil Engineering*. 2013;40(9):927–929. <https://doi.org/10.1139/cjce-2013-0227>

16. Benard A, Bos-Levenbach EC. Het uitzetten van waarnemingen op waarschijnlijkheidspapier. *Statistica Neerlandica*. 1953;7(3):163–173. <https://www.sci-hub.ru/10.1111/j.14679574.1953.tb00821.x?ysclid=m6hwlukl7k731787987>

Об авторе:

Анатолий Анатольевич Котесов, кандидат технических наук, доцент кафедры эксплуатации транспортных систем и логистики Донского государственного технического университета (344003, Российская Федерация, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), [SPIN-код](#), [ORCID](#), [ScopusID](#), [ResearcherID](#), a.kotesov@yandex.ru

Конфликт интересов: автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.

About the Author:

Anatoly A. Kotesov, Cand.Sci. (Eng.), Associate Professor of the Department of Transport Systems and Logistics, Don State Technical University (1, Gagarin Sq., Rostov-on-Don, 344003, Russian Federation), [SPIN-code](#), [ORCID](#), [ScopusID](#), [ResearcherID](#), a.kotesov@yandex.ru

Conflict of Interest Statement: the author declares no conflict of interest.

The author has read and approved the final version of manuscript.

Поступила в редакцию / Received 07.02.2025

Поступила после рецензирования / Reviewed 25.02.2025

Принята к публикации / Accepted 10.03.2025